

Dla belki przedstawionej na rysunku i obciążonej w podany sposób wyznaczyć wykresy momentów gnących i sił tnących. W rozwiązaniu wykorzystaj metodę trzech momentów.

Podpory:

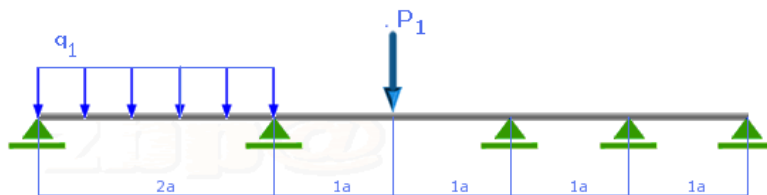
R ₁ ->	x=	0 mm
R ₂ ->	x=	200 mm
R ₃ ->	x=	400 mm
R ₄ ->	x=	500 mm
R ₅ ->	x=	600 mm

Obciążenie siłą skupioną:

P ₁ =	-100 N	x=	300 mm
------------------	--------	----	--------

Obciążenie ciągłe:

q ₁ =	-1	x _p =	0	x _k =	200
N/mm		mm		mm	

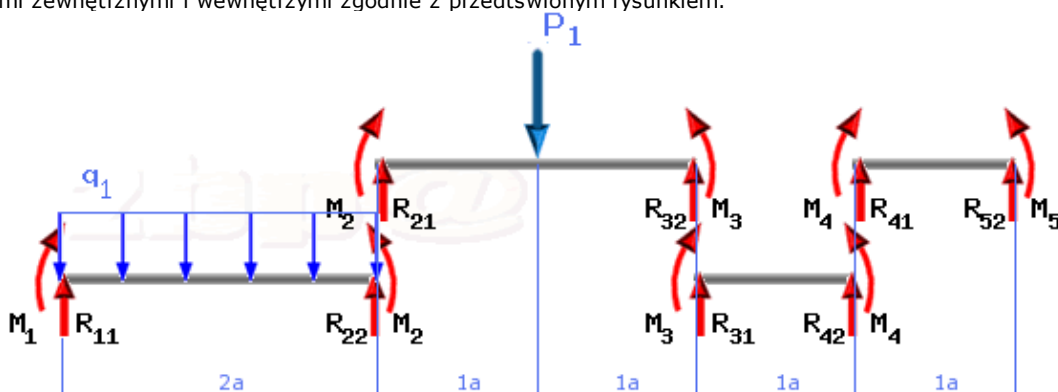


a=100 mm

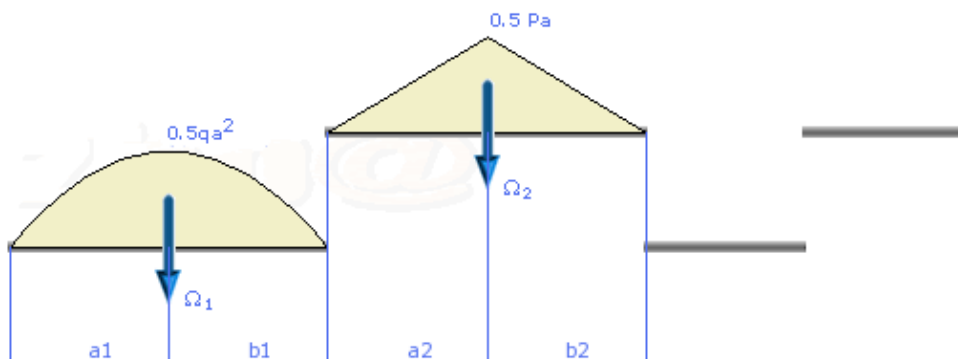
q₁=q

P₁=qa

Rozpatrywana belka jest trzykrotnie statycznie niewyznaczalna (pięć podpór, sześć reakcji - a dla układu płaskiego dowolnego mamy tylko trzy warunki równowagi). Brakujące równania do rozwiązania tego zagadnienia znajdziemy z równań trzech momentów. Do napisania tych równań przystąpimy po rozbiciu belki na przęsła ograniczone podporami. Przęsła obciążone są siłami zewnętrznymi i wewnętrznymi zgodnie z przedstwowym rysunkiem.



Dla każdego przęsła wykonamy wykresy momentów gnących. Moment gnący dla każdego przęsła pochodzi od obciążenia zewnętrznego tego przęsła.



Równania trzech momentów dla sąsiadujących przęseł są następujące:

$$M_1 2a + 2M_2(2a_1 + 2a) + M_3 2a = -6 \frac{\Omega_1 a_1}{l_1} - 6 \frac{\Omega_2 b_2}{l_2}$$

$$M_2 2a + 2M_3(2a + a) + M_4 a = -6 \frac{\Omega_2 a_2}{l_2} - 6 \frac{\Omega_3 b_3}{l_3}$$

$$M_3 a + 2M_4(a + a) + M_5 a = -6 \frac{\Omega_3 a_3}{l_3} - 6 \frac{\Omega_4 b_4}{l_4}$$

Pole powierzchni Ω każdego wykresu momentów gnących i jego położenie jego środka ciężkości określają odpowiednio $\Omega()$, $a()$, $b()$ i wynoszą:

$$\Omega_1 = \frac{2}{3} \cdot 0.5qa^2 \cdot 2a = 0.667qa^3$$

$$a_1 = b_1 = 1/2 \cdot 2a = 1a$$

$$\Omega_1 \cdot b_1 = 0.667q \cdot a^2 \cdot 1a = 0.667q \cdot a^3$$

$$\Omega_2 = \frac{1}{2} 0.5Pa \cdot 2a = 0.5P \cdot a^2$$

$$a_2 = b_2 = 1/2 \cdot 2a = 1a$$

$$\Omega_2 \cdot a_2 = 0.5P \cdot a^2 \cdot 1a = 0.5P \cdot a^3$$

$$\Omega_2 \cdot b_2 = 0.5P \cdot a^2 \cdot 1a = 0.5P \cdot a^3$$

$$\Omega_3 = \Omega_4 = 0$$

Po podstawieniu do równań znane wielkości otrzymasz:

$$M_1 \cdot 2a + 2M_2(2a+2a) + M_3 \cdot 2a = -6 \frac{0.667q \cdot a^4}{2a} - 6 \frac{0.5P \cdot a^3}{2a}$$

$$M_2 \cdot 2a + 2M_3(2a+1a) + M_4 \cdot 1a = -6 \frac{0.5P \cdot a^3}{2a} - 6 \frac{0}{1a}$$

$$M_3 \cdot 1a + 2M_4(1a+1a) + M_5 \cdot 1a = -6 \frac{0}{1a} - 6 \frac{0}{1a}$$

a ponieważ na początku i końcu belki nie ma przyłożonego momentu skupionego to $M_1 = M_5 = 0$, to do rozwiązania pozostaje układ równań:

$$2M_2(2a+2a) + M_3 \cdot 2a = -6 \frac{0.667q \cdot a^4}{2a} - 6 \frac{0.5P \cdot a^3}{2a}$$

$$M_2 \cdot 2a + 2M_3(2a+1a) + M_4 \cdot 1a = -6 \frac{0.5P \cdot a^3}{2a}$$

$$M_3 \cdot 1a + 2M_4(1a+1a) = 0$$

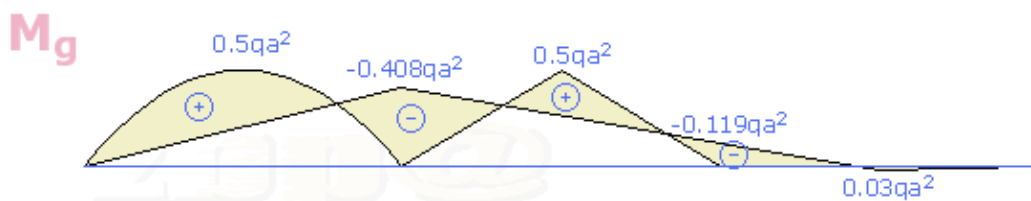
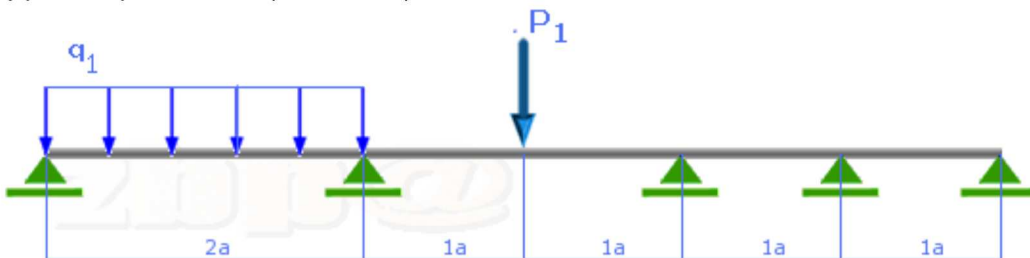
Rozwiązaniem tego układu równań jest

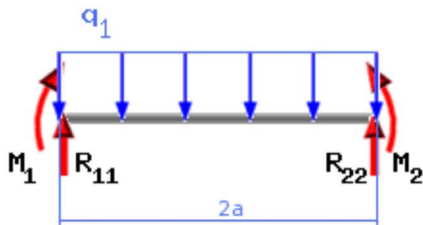
$$M_1 = -0.408 q \cdot a^2$$

$$M_2 = -0.119 q \cdot a^2$$

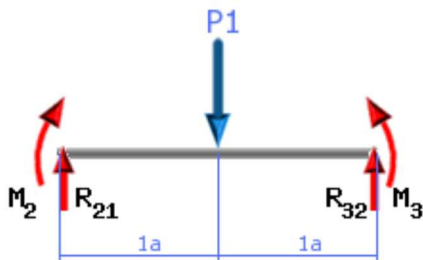
$$M_3 = 0.030 q \cdot a^2$$

Znając te wielkości momentów możemy pokusić się o sporządzenie wykresu momentów gnących dla rozpatrywanej belki. Stosując metodę dodawania wykresów otrzymasz:

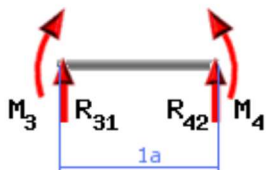




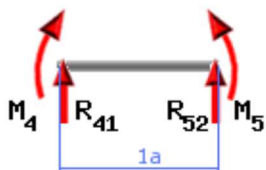
$$\begin{aligned} \Sigma M_{i1} &= + M_1 - M_2 + q_1 \cdot 2a \cdot a - R_{22} \cdot 2a = 0 \\ \Sigma M_{j2} &= + M_1 - M_2 - q_1 \cdot 2a \cdot a + R_{11} \cdot 2a = 0 \\ R_{11} &= 0.79 q_1 a \text{ [79 N]}, \\ R_{22} &= 1.204 q_1 a \text{ [120.4 N]} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \Sigma M_{i2} &= + M_2 - M_3 + P_1 \cdot a - R_{32} \cdot 2a = 0 \\ \Sigma M_{j3} &= + M_2 - M_3 - P_1 \cdot a + R_{21} \cdot 2a = 0 \\ R_{21} &= 0.644 q_1 a \text{ [64.4 N]}, \\ R_{32} &= 0.356 q_1 a \text{ [35.6 N]} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \Sigma M_{i3} &= + M_3 - M_4 - R_{42} \cdot a = 0 \\ \Sigma M_{j4} &= + M_3 - M_4 + R_{31} \cdot a = 0 \\ R_{31} &= 0.089 q_1 a = 89 \text{ N}, \\ R_{42} &= -0.089 q_1 a = -89 \text{ N} \end{aligned}$$

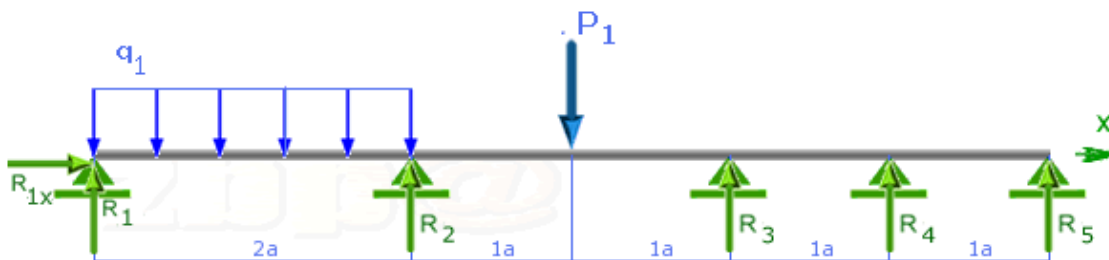


$$\begin{aligned} \Sigma M_{i4} &= + M_4 - M_5 - R_{52} \cdot a = 0 \\ \Sigma M_{j5} &= + M_4 - M_5 + R_{41} \cdot a = 0 \\ R_{41} &= -0.015 q_1 a = -15 \text{ N}, \\ R_{52} &= 0.015 q_1 a = 15 \text{ N} \end{aligned}$$

Reakcje wynoszą:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_1 &= R_{11} = \mathbf{0.796 qa} \text{ [79.6 N]} \\ \mathbf{R}_2 &= R_{21} + R_{22} = (0.644 + 1.204) q_1 a \\ \mathbf{R}_2 &= \mathbf{1.848 qa} \text{ [184.8 N]} \\ \mathbf{R}_3 &= R_{31} + R_{32} = (0.089 + 0.356) q_1 a \\ \mathbf{R}_3 &= \mathbf{0.504 qa} \text{ [50.4 N]} \\ \mathbf{R}_4 &= R_{41} + R_{42} = (-0.030 - 0.149) q_1 a \\ \mathbf{R}_4 &= \mathbf{0.179 qa} \text{ [17.9 N]} \\ \mathbf{R}_5 &= R_{52} = \mathbf{0.030 qa} \text{ [3.0 N]} \end{aligned}$$

Wykorzystując obliczone reakcje w podporach belki



możemy wyznaczyć zależności M_g i T w poszczególnych przedziałach i wyznaczyć ich wielkości na końcach rozpatrywanych przedziałów belki

$0 < x < 2a$	$M_g = -\frac{q_1 \cdot x^2}{2} + R_1 \cdot x$ $T = -q_1 \cdot x + R_1$ $\frac{dM_g}{dx} = -q_1 \cdot x + R_1 = 0 \quad x = 0.796a \text{ (79.6 mm)}$	x [mm]	M_g [Nmm]	T [N]
		0 (0)	0 (0)	0.8 qa (79.6)
		0.796a (79.6)	0.32 qa ² (3168.08)	0 qa (0)
		2a (200)	-0.41 qa ² (-4080)	-1.2 qa (-120.4)
$2a < x < 3a$	$M_g = -q_1 \cdot 2 \cdot a \cdot (x-a) + R_1 \cdot x + R_2 \cdot (x-2 \cdot a)$ $T = -q_1 \cdot 2 \cdot a + R_1 + R_2$	2a (200)	-0.41 qa ² (-4080)	0.64 qa (64.47)
		3a (300)	0.24 qa ² (2367.5)	0.64 qa (64.47)
$3a < x < 4a$	$M_g = -q_1 \cdot 2 \cdot a \cdot (x-a) + R_1 \cdot x + R_2 \cdot (x-2 \cdot a) - P_1 \cdot (x-3 \cdot a)$ $T = -q_1 \cdot 2 \cdot a + R_1 + R_2 - P_1$	3a (300)	0.24 qa ² (2367.5)	-0.36 qa (-35.53)
		4a (400)	-0.12 qa ² (-1185)	-0.36 qa (-35.53)
$4a < x < 5a$	$M_g = -q_1 \cdot 2 \cdot a \cdot (x-a) + R_1 \cdot x + R_2 \cdot (x-2 \cdot a) - P_1 \cdot (x-3 \cdot a) + R_3 \cdot (x-4 \cdot a)$ $T = -q_1 \cdot 2 \cdot a + R_1 + R_2 - P_1 + R_3$	4a (400)	-0.12 qa ² (-1185)	0.15 qa (14.85)
		5a (500)	0.03 qa ² (300)	0.15 qa (14.85)
$5a < x < 6a$	$M_g = -q_1 \cdot 2 \cdot a \cdot (x-a) + R_1 \cdot x + R_2 \cdot (x-2 \cdot a) - P_1 \cdot (x-3 \cdot a) + R_3 \cdot (x-4 \cdot a) + R_4 \cdot (x-5 \cdot a)$ $T = -q_1 \cdot 2 \cdot a + R_1 + R_2 - P_1 + R_3 + R_4$	5a (500)	0.03 qa ² (300)	-0.03 qa (-3)
		6a (600)	0 (-0)	-0.03 qa (-3)

Na podstawie wyznaczonych zależności wykresy M_g i T dla rozpatrywanej belki przedstawiają wykresy poniżej:

