Momenty bezwładności dla przedstawionej figury (ćwiartki koła) mogę być określane względem różnych osi. Moment względem osi z określamy jako,

$$J_z = \int_A y^2 \, dA$$

$$J_z = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \int_0^r (\rho \cos \alpha)^2 \rho \, d\alpha \, d\rho$$

$$J_z = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos^2 \alpha \, d\alpha \; \frac{\rho^4}{4} \Big|_0^r$$

$$J_z = \frac{r^4}{4} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha) \, d\alpha$$

$$J_z = \frac{r^4}{8}\left(\alpha + \frac{1}{2}\sin 2\alpha\right) \Big|_{-\pi/4}^{\pi/4}$$

$$J_z = \frac{r^4 \, (\pi + 2)}{16}$$

względem osi y określamy

$$J_y = \int_A z^2 \, dA$$

$$J_y = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \int_0^r (\rho \sin \alpha)^2 \rho \, d\alpha \, d\rho$$

$$J_y = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sin^2 \alpha \, d\alpha \; \frac{\rho^4}{4} \Big|_0^r$$

$$J_y = \frac{r^4}{4} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha) \, d\alpha$$

$$J_y = \frac{r^4}{8}\left(\alpha - \frac{1}{2}\sin 2\alpha\right) \Big|_{-\pi/4}^{\pi/4}$$

$$J_y = \frac{r^4 \, (\pi - 2)}{16}$$

względem osi yz to

$$J_{zy} = \int_A yz \, dA$$

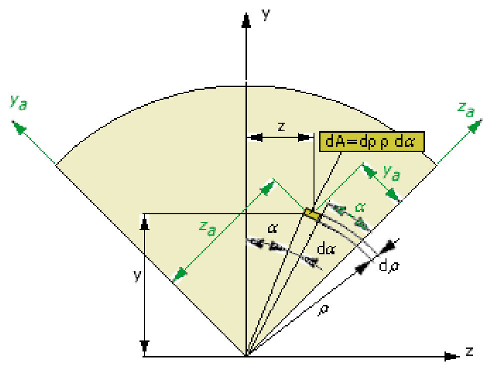
$$J_{zy} = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \int_0^r \rho \cos\alpha \;\; \rho \sin\alpha \; \rho \, d\alpha \, d\rho$$

$$J_{zy} = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sin\alpha \cos\alpha \, d\alpha \; \frac{\rho^4}{4} \Big|_0^r$$

$$J_{zy} = \frac{r^4}{4} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{1}{2} \sin 2\alpha \, d\alpha$$

$$J_{zy} = \frac{r^4}{8}\left(-\frac{1}{2}\cos 2\alpha\right) \Big|_{-\pi/4}^{\pi/4}$$

$$J_{zy} = 0$$



a względem osi z_a jako

$$J_{z_a} = \int_A {y_a}^2 \, dA$$

$$J_{za} = \int_0^{\pi/2} \int_0^r (\rho \sin \alpha)^2 \rho \, d\alpha \, d\rho$$

$$J_{za} = \int_0^{\pi/2} \sin^2 \alpha \, d\alpha \; \frac{\rho^4}{4} \Big|_0^r$$

$$J_{za} = \frac{r^4}{4} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha) \, d\alpha$$

$$J_{za} = \frac{r^4}{8}\left(\alpha - \frac{1}{2}\sin 2\alpha\right) \Big|_0^{\pi/2}$$

$$J_{za} = \frac{\pi \, r^4}{16}$$

a względem osi y_a jako

$$J_{y_a} = \int_A {z_a}^2 \, dA$$

$$J_{ya} = \int_0^{\pi/2} \int_0^r (\rho \cos \alpha)^2 \rho \, d\alpha \, d\rho$$

$$J_{ya} = \int_0^{\pi/2} \cos^2 \alpha \, d\alpha \; \frac{\rho^4}{4} \Big|_0^r$$

$$J_{ya} = \frac{r^4}{4} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha) \, d\alpha$$

$$J_{ya} = \frac{r^4}{8}\left(\alpha + \frac{1}{2}\sin 2\alpha\right) \Big|_0^{\pi/2}$$

$$J_{ya} = \frac{\pi \, r^4}{16}$$

względem osi $y_a z_a$ to

$$J_{zaya} = \int_A y_a z_a \, dA$$

$$J_{zaya} = \int_0^{\pi/2} \int_0^r \rho \cos\alpha \;\; \rho \;\; \sin\alpha \; \rho \, d\alpha \;\; d\rho$$

$$J_{zaya} = ; \int_0^{\pi/2} \sin\alpha \cos\alpha \, d\alpha \; \frac{\rho^4}{4} \Big|_0^r$$

$$J_{zaya} = \frac{r^4}{4} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} \sin 2\alpha \, d\alpha$$

$$J_{zaya} = \frac{r^4}{8}\left(-\frac{1}{2}\cos 2\alpha\right) \Big|_0^{\pi/2}$$

$$J_{zaya} = \frac{r^4}{8}$$

Z uwagi na minimalne wartości momentów bezwładności względem osi przechodzących przez środek ciężkości figur, wyznaczmy położenie środka ciężkości rozpatrywanej figury

$$y_c=\frac{\int_A y\,dA}{\int_A dA}$$

$$y_c=\frac{\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\int_0^r \rho\cos\alpha\,\rho\,d\alpha\,d\rho}{\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\int_0^r \rho\,d\alpha\,d\rho}$$

$$y_c=\frac{\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\sin\alpha\,d\alpha\;\frac{\rho^3}{3}\Big|_0^r}{\int_{-\pi/4}^{\pi/4}d\alpha\;\frac{\rho^2}{2}\Big|_0^r}$$

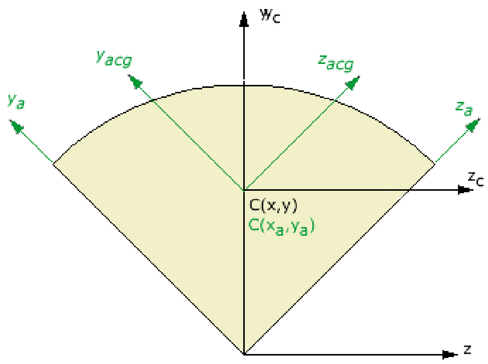
$$y_c=\frac{\frac{r^3}{3}\cos\alpha\Big|_{-\pi/4}^{\pi/4}}{\frac{r^2}{2}\,\alpha\Big|_{-\pi/4}^{\pi/4}}$$

$$y_c=\frac{\frac{r^3}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)}{\frac{r^2}{2}\left(\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)}$$

$$y_c=\frac{4\sqrt{2}\,r}{3\,\pi}$$

z uwagi na symetrię figury wzgędem osi y

$z_c=0$



$$y_{ac}=\frac{\int_A y_a\,dA}{\int_A dA}$$

$$y_{ac}=\frac{\int_0^{\pi/2}\int_0^r \rho\sin\alpha\;\rho\,d\alpha\,d\rho}{\int_0^{\pi/2}\int_0^r \rho\,d\alpha\,d\rho}$$

$$y_{ac}=\frac{\int_0^{\pi/2}\sin\alpha\,d\alpha\;\frac{\rho^3}{3}\Big|_0^r}{\int_0^{\pi/2}d\alpha\;\frac{\rho^2}{2}\Big|_0^r}$$

$$y_{ac}=\frac{\frac{r^3}{3}\left(-\cos\alpha\right)\Big|_0^{\pi/2}}{\frac{r^2}{2}\,\alpha\Big|_0^{\pi/2}}$$

$$y_{ac}=\frac{\frac{r^3}{3}\left(0-\left(-1\right)\right)}{\frac{r^2}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\left(-0\right)\right)}$$

$$y_{ac}=\frac{4\,r}{3\,\pi}$$

$$z_{ac}=\frac{\int_A z_a\,dA}{\int_A dA}$$

$$z_{ac}=\frac{\int_0^{\pi/2}\int_0^r \rho\cos\alpha\,\rho\,d\alpha\,d\rho}{\int_0^{\pi/2}\int_0^r \rho\,d\alpha\,d\rho}$$

$$z_{ac}=\frac{\int_0^{\pi/2}\cos\alpha\,d\alpha\;\frac{\rho^3}{3}\Big|_0^r}{\int_0^{\pi/2}d\alpha\;\frac{\rho^2}{2}\Big|_0^r}$$

$$z_{ac}=\frac{\frac{r^3}{3}\;\sin\alpha\Big|_0^{\pi/2}}{\frac{r^2}{2}\,\alpha\Big|_0^{\pi/2}}$$

$$z_{ac}=\frac{\frac{r^3}{3}\left(1-0\right)}{\frac{r^2}{2}\left(\frac{\pi}{2}-0\right)}$$

$$z_{ac}=\frac{4\,r}{}$$

3π

Momenty bezwładności względem osi przechodzących przez środek ciężkości możemy obliczyć wykorzystując twierdzenie Stainera

$$J_{zc} = J_z - \beta_y^2 A$$

$$J_{zc} = \frac{r^4(\pi+2)}{16} - \left(\frac{4\sqrt{2}\, r}{3\pi}\right)^2 \frac{\pi r^2}{4}$$

$$J_{zc} = \frac{r^4(\pi+2)}{16} - \frac{8r^4}{9\pi}$$

$$J_{zc} = 0.038\ r^4$$

$$J_{zac} = J_{za} - \beta^2 A$$

$$J_{zac} = \frac{\pi r^4}{16} - \left(\frac{4\ r}{3\pi}\right)^2 \frac{\pi r^2}{4}$$

$$J_{zac} = \frac{\pi r^4}{16} - \frac{4r^4}{9\pi}$$

$$J_{zac} = 0.055\ r^4$$

ponieważ osie y i y_c pokrywają się

$$J_{yc} = J_y = \frac{r^4(\pi-2)}{16}$$

$$J_{yc} = 0.071\ r^4$$

również

$$J_{yac} = J_{za} - \beta^2 A$$

$$J_{yac} = \frac{\pi r^4}{16} - \left(\frac{4\ r}{3\pi}\right)^2 \frac{\pi r^2}{4}$$

$$J_{yac} = \frac{\pi r^4}{16} - \frac{4r^4}{9\pi}$$

$$J_{yac} = 0.055\ r^4$$

a

$$J_{zcyc} = J_{zy} - \beta_y \beta_z A$$

ponieważ $\beta_z = 0$

$$J_{zcyc} = J_{zy} = 0$$

zaś

$$J_{zacyac} = J_{zaya} - \beta^2 A$$

$$J_{zacyac} = \frac{r^4}{8} - \left(\frac{4\ r}{3\pi}\right)^2 \frac{\pi r^2}{4}$$

$$J_{zacyac} = \frac{r^4}{8} - \frac{4r^4}{9\pi}$$

$$J_{zacyac} = -0.016\ r^4$$

W rozpatrywanym przypadku przyjęte uklady współrzędnych Oz_cy_c i $Oz_{ac}y_{ac}$ są obrócone względem siebie o kąt 45^0. Z uwagi na to, że osie z_c, z_c są osiami głównymi, można wykorzystać zależności między momentami bezwładności względem osi obróconych względem siebie. I tak

$$J_{zac} = J_{zc}\cos^2\alpha + J_{yc}\sin^2\alpha$$

$$J_{zac} = \left(\frac{r^4(\pi+2)}{16} - \frac{8r^4}{9\pi}\right)\cos^2 45^0 + \frac{r^4(\pi-2)}{16}\sin^2 45^0$$

$$J_{zac} = \frac{\pi r^4}{16} - \frac{4r^4}{9\pi}$$

$$J_{zac} = 0.055\ r^4$$

analogicznie:

$$J_{yac} = J_{yc}\cos^2\alpha + J_{zc}\sin^2\alpha$$

$$J_{yac} = \frac{r^4(\pi-2)}{16}\cos^2 45^0 + \left(\frac{r^4(\pi+2)}{16} - \frac{8r^4}{9\pi}\right)\sin^2 45^0$$

$$J_{yac} = \frac{\pi r^4}{16} - \frac{4r^4}{9\pi}$$

$$J_{yac} = 0.055\ r^4$$

oraz

$$J_{yac} = \frac{J_{zc} - J_{yc}}{2}\sin 2\alpha$$

$$J_{zacyac} = \frac{\left(\frac{r^4(\pi+2)}{16} - \frac{8r^4}{9\pi}\right) - \frac{r^4(\pi-2)}{16}}{2}\sin 90^0$$

$$J_{zacyac} = \frac{r^4}{8} - \frac{4r^4}{9\pi}$$

$$J_{zacyac} = -\,0.016\ r^4$$

Niezmienniki momentów bezwładności:

$$I_1 = J_{zc} + J_{yc} = J_{zac} + J_{yac}$$

$$\frac{r^4(\pi + 2)}{16} - \frac{8r^4}{9\pi} + \frac{r^4(\pi - 2)}{16} = \frac{\pi r^4}{16} - \frac{4r^4}{9\pi} + \frac{\pi r^4}{16} - \frac{4r^4}{9\pi}$$

$$\frac{\pi r^4}{8} - \frac{8r^4}{9\pi} = \frac{\pi r^4}{8} - \frac{8r^4}{9\pi}$$

$$0.11\ r^4 = 0.11\ r^4$$

oraz

$$I_2 = J_{zc} \cdot J_{yc} - J_{xcyc}^2 = J_{zac} \cdot J_{yac} - J_{zacyac}^2$$

$$\left(\frac{r^4(\pi + 2)}{16} - \frac{8r^4}{9\pi}\right) \cdot \left(\frac{r^4(\pi - 2)}{16}\right) - 0 = \left(\frac{\pi r^4}{16} - \frac{4r^4}{9\pi}\right) \cdot \left(\frac{\pi r^4}{16} - \frac{4r^4}{9\pi}\right) - \left(\frac{r^4}{8} - \frac{4r^4}{9\pi}\right)^2$$

$$2.74 \cdot 10^{-3}\ r^4 = 2.74 \cdot 10^{-3}\ r^4$$

dla rozwiązywanego przekroju są również spełnione.