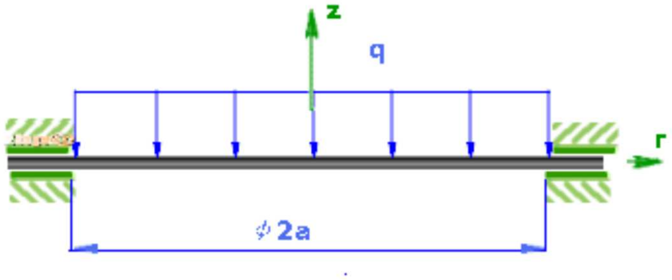
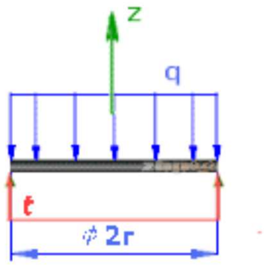
Wyznaczyć maksymalne ugięcie dla płyty przedstawionej na rysunku i obciążonej ciśnieniem q. Oblicz największe naprężenia jakie w niej występują.



Rózniczkowe równanie opisujące ugięcie płyty w funkcji jej obciążenia jest następujące:

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dw}{dr}\right)\right) = -\frac{t}{D}$$

gdzie t jest siłą tnącą, którą możemy wyznaczyć wycinając z płyty element o średnicy F2r. Wzdłuż tego brzegu, o średnicy F2r działa właśnie siła t



Dla tak wyciętego elementu warunek równowagi to:

$$\Sigma F_{iz} = -q\,\Pi\,r^2 - 2\,\Pi\,r\,t = 0$$

z warunku tego wyznacz

$$t = \frac{q\,r}{2}$$

podstwiając teraz t

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dw}{dr}\right)\right) = -\frac{1}{D}\left(\frac{q\,r}{2}\right)$$

oraz całkując otrzymane równanie masz kolejno:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dw}{dr}\right) = -\frac{1}{D}\left(\frac{q\,r^2}{4} + C_1\right)$$

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dw}{dr}\right) = -\frac{1}{D}\left(\frac{q\,r^3}{4} + C_1 r\right)$$

$$r\frac{dw}{dr} = -\frac{1}{D}\left(\frac{q\,r^4}{16} + C_1\frac{r^2}{2} + C_2\right)$$

$$\frac{dw}{dr} = -\frac{1}{D}\left(\frac{q\,r^3}{16} + C_1\frac{r}{2} + \frac{C_2}{r}\right)$$

$$w = -\frac{1}{D}\left(\frac{q\,r^4}{64} + C_1\frac{r^2}{4} + C_2 \ln r + C_3\right)$$

Dla tego sposobu utwierdzenia:znane ugięcie ołyty w musi spelniać warunki jej podparcia. Z tych też warunków wyznaczone zostaną stałe całkowania.
Płyta na brzegu zewnętrzym jest w określony sposób utwierdzona. Dla tego sposobu utwierdzenia:

ugięcie dla r=a $\quad w = 0$

i kąt obrotu dla r=a $\quad f = \frac{dw}{dr} = 0$

Również dla r=0 ugięcie musi mieć wartość skończoną - dlatego C_2=0.

$$\left.\frac{dw}{dr}\right|_{r=a} = -\frac{1}{D}\left(\frac{q\,a^{\,3}}{16} + C_1\frac{a}{2}\right) = 0$$

$$\left.w\right|_{r=a} = -\frac{1}{D}\left(\frac{q\,ra^4}{64} + C_1\frac{a^2}{4} + C_3\right) = 0$$

Stałe całkowania z tego ukladu równań to

$$C_1 = -\frac{q\,a^2}{8}$$

$$C_3 = \frac{q\,a^4}{64}$$

podstawiając stałe do równania otrzymujesz:

$$w = -\frac{1}{D}\left(\frac{q\,r^4}{64} - \frac{q\,a^2}{8}\frac{r^2}{4} + \frac{q\,a^4}{64}\right)$$

$$w = -\frac{q}{64D}\left(r^4 - 2a^2r^2 + a^4\right)$$

$$w = -\frac{q}{64D}\left(a^2 - r^2\right)^2$$

maksymalne ugięcie płyty wystąpi dla r=0

$$w_{max} = \left.w\right|_{r=0} = -\frac{q\,a^4}{64\,D}$$

Naprężenia w obciążonej płycie gdy znamy funkcję jej ugięcia w możemy wyznaczyć z następujących zależności:

$$m_r = D\left(\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{v}{r}\,\frac{dw}{dr}\right)$$

$$m_\theta = D\left(\frac{1}{r}\frac{dw}{dr} + v\,\frac{d^2w}{dr^2}\right)$$

musimy znać zatem pochodne w

$$\frac{dw}{dr} = -\frac{q\,r\,(a^2 - r^2)}{16\,D}$$

$$\frac{d^2w}{dr^2} = -\frac{q\,(a^2 - 3r^2)}{16\,D}$$

po podstawieniu

$$m_r = -\frac{q}{16}\left(a^2v - r^2v + a^2 - 3r^2\right)$$

$$m_\theta = -\frac{q}{16}\left(a^2v - 3r^2v + a^2 - r^2\right)$$

momenty promieniowe m_r i obwodowe m_θ dla r=0

$$m_r = m_\theta = -\frac{q\,a^2}{16}(1 + v)$$

analogicznie dla r=a

$$m_r = -\frac{q}{16}\left(a^2v - a^{\,2}v + a^2 - 3a^2\right) = -\frac{qa^2}{8}$$

$$m_\theta = -\frac{q}{16}\left(a^2v - 3a^2v + a^2 - a^{\,2}\right) = -\frac{qa^2v}{8}$$

naprężenia zredukowane według hipotezy Hubera

$$\sigma_{zr}^{HMH} = \frac{6\,m_{zr}}{h^2} = \frac{6\sqrt{m_r^2 - m_r m_\theta + m_\theta^2}}{h^2}$$

Dla r=0

$$\sigma_{zr}^{HMH} = \frac{6\,m_{zr}}{h^2} = \frac{6qa^2\sqrt{(1+v)^2 - (1+v)(1+v) + (1+v)^2}}{16h^2} = \frac{3qa^2(1+v)}{8h^2}$$

Dla r=a

$$\sigma_{zr}^{HMH} = \frac{6\,m_{zr}}{h^2} = \frac{6qa^2\sqrt{1^2 - 1v + v^2}}{8h^2} = \frac{3qa^2\sqrt{1 - v + v^2}}{4h^2}$$

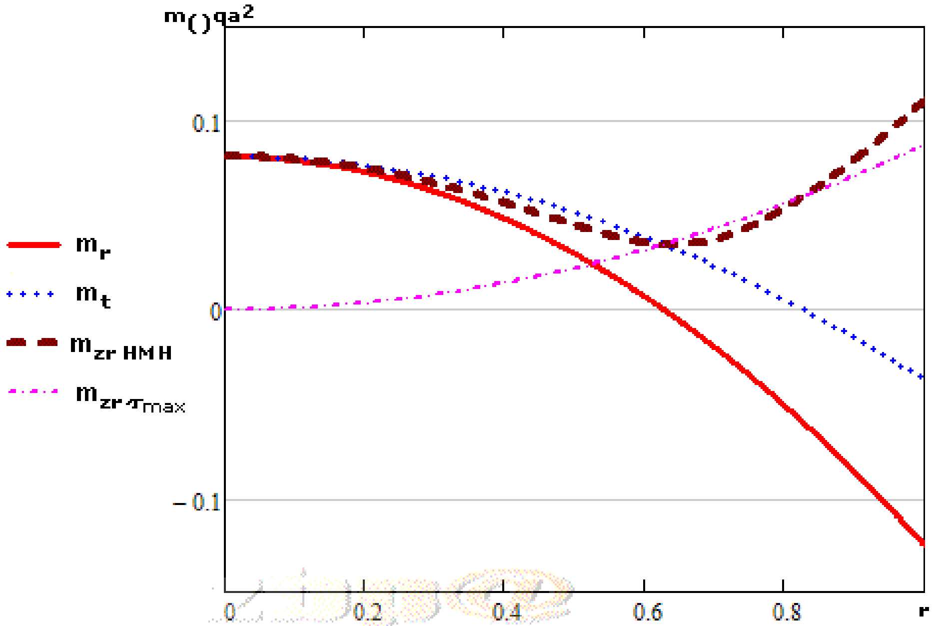
naprężenia zredukowane według hipotezy τ_{max}

$$m_{zr}^{\tau max} = \frac{q\,a^2}{8}(1 - v)$$

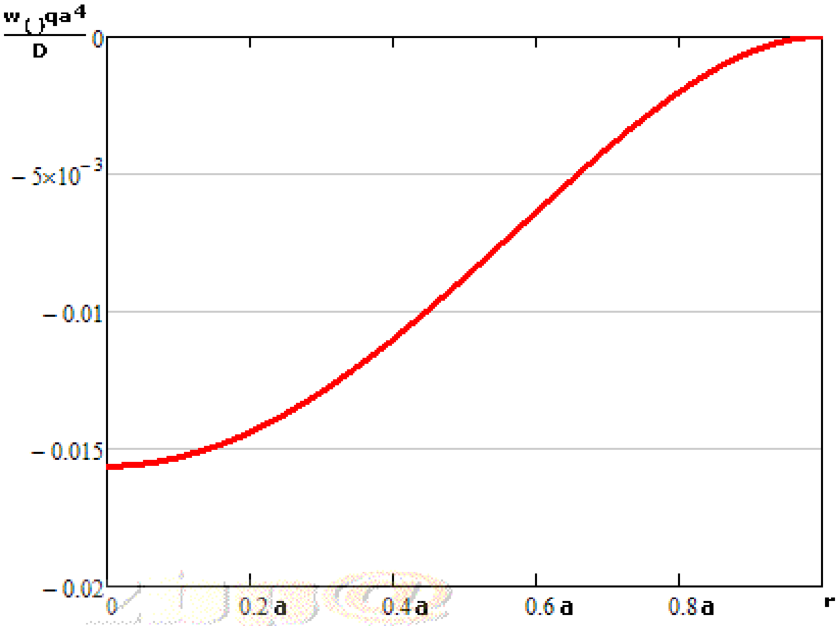
Dla r=0 $m_{zr}=0$,
a dla r=a

$$\sigma_{zr}^{\tau max} = \frac{6\,m_{zr}}{h^2} = \frac{6 \cdot q\,a^2\,(1 - v)}{8 \cdot h^2} = \frac{3 \cdot q\,a^2\,(1 - v)}{4 \cdot h^2}$$

Przebieg zmian naprężeń w płycie przedstawiaono na wykresie



również ugięcie płyty przedstawiono na wykresie



Płyta obciążona w podany sposób posiada

promień płyty	$a = 0.2$	m
płyta obciążona jest ciśnieniem	$q = 350$	$\frac{kN}{m^2}$
posiada grubość	$h = 10$	mm
moduł Younga	$E = 200000$	MPa
i liczbę Poissona	$v = 0.3$	
naprężenia dopuszczalne	$k_r = 120$	MPa

maksymalne ugięcie płyty wystąpi dla r=0, gdy sztywność płytowa wynosi

$$D = \frac{E\,h^3}{12(1-v^2)} = \frac{2\cdot 10^{11}\cdot(10\cdot 10^{-3})^3}{12(1-v^2)} = 18315\ Nm$$

$$w_{max} = w\Big|_{r=0} = -\frac{q\,a^4}{64\,D} = -\frac{350\cdot 1000\cdot(0.2)^4}{64\cdot 18315} = -0.48\cdot 10^{-3} m$$

$$w_{max} = -0.48\ mm$$

Dla r=a naprężenia promieniowe

$$\sigma_r = -\frac{6\cdot qa^2}{8\cdot h^2} = -\frac{6\cdot 350\cdot 1000\cdot 0.2^2}{8\cdot(10\cdot 10^{-3})^2} = -105000000\ Pa$$

$$\sigma_r = -105\ MPa$$

naprężenia obwodowe

$$\sigma_\theta = -\frac{6\cdot qa^2\cdot v}{8\cdot h^2} = -\frac{6\cdot 350\cdot 1000\cdot 0.2^2\cdot 0.3}{8\cdot(10\cdot 10^{-3})^2} = -3.15E+7\ Pa$$

$$\sigma_\theta = -32\ MPa$$

oraz naprężenia zredukowane według hipotezy Hubera

$$\sigma_{zr}^{HMH} = \frac{3qa^2\sqrt{1-v+v^2}}{4h^2} = \frac{3\cdot 350\cdot 1000\cdot 0.2^2\sqrt{1-0.3+0.3^2}}{4\cdot(10\cdot 10^{-3})^2} = 93\cdot 10^6\ Pa$$

$$\sigma_{zr}^{HMH} = 93\ MPa \le 120\ MPa$$

według hipotezy τ_{max}

$$\sigma_{zr}^{tmax} = \frac{q\,a^2}{8}\,(1 - v) = \frac{350 \cdot 1000 \cdot 0.2^2}{8}\,(1 - 0.3) = 74 \cdot 10^6\ Pa$$

$$\sigma_{zr}^{tmax} = 74\ MPa \le 120\ MPa$$