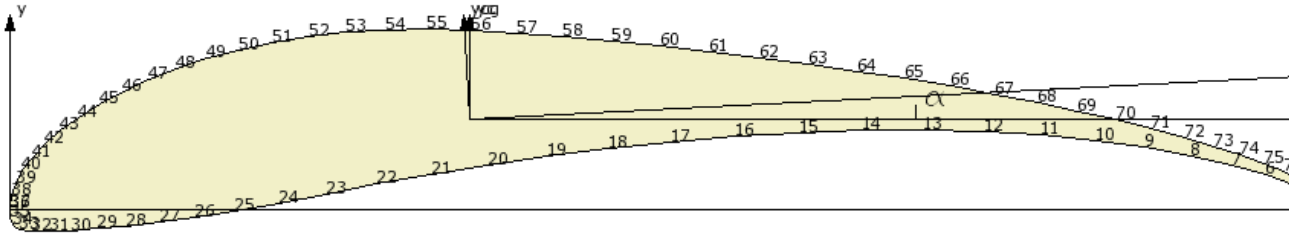


Dla figury przedstawionej na rysunku wyznacz:

- położenie środka ciężkości  $z_c, y_c$
- moment statyczny względem osi  $z$  i  $y$
- momenty bezwładności względem osi  $z$  i  $y$
- momenty bezwładności względem osi centralnych i głównych
- kąt między osią centralną i główną

Dane: ( rysunek przekroju , numeracja punktów co 1 )



Pole powierzchni, moment statyczny, moment bezwładności i moment dewiacji obliczamy wg podanych poniżej wyrażeń

$$A = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (z_{k+1} - z_k) \cdot (y_{k+1} + y_k)$$

$$S_z = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^n (z_{k+1} - z_k) \cdot (y_k^2 + y_k \cdot y_{k+1} + y_{k+1}^2)$$

$$S_y = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^n (y_{k+1} - y_k) \cdot (z_k^2 + z_k \cdot z_{k+1} + z_{k+1}^2)$$

$$I_z = \frac{1}{12} \sum_{k=1}^n (z_{k+1} - z_k) \cdot (y_k^3 + y_k^2 \cdot y_{k+1} + y_k \cdot y_{k+1}^2 + y_{k+1}^3)$$

$$I_y = \frac{1}{12} \sum_{k=1}^n (y_{k+1} - y_k) \cdot (z_k^3 + z_k^2 \cdot z_{k+1} + z_k \cdot z_{k+1}^2 + z_{k+1}^3)$$

$$I_{zy} = \frac{1}{24} \sum_{k=1}^n (z_{k+1} - z_k) \cdot [z_k \cdot (3 y_k^2 + y_{k+1}^2 + 2 y_k \cdot y_{k+1}) + z_{k+1} \cdot (3 y_{k+1}^2 + y_k^2 + 2 y_k \cdot y_{k+1})]$$

Dla pola o punktach 1 - 82, gdy współrzędne podane są w cm

punkt k	x [cm]	y [cm]	długość odcinka /k, k+1/	odcinek	Pole A [cm <sup>2</sup> ]	Moment statyczny Sz [cm <sup>3</sup> ]	Moment statyczny Sy [cm <sup>3</sup> ]	Moment bezwładności Iz [cm <sup>4</sup> ]	Moment bezwładności Iy [cm <sup>4</sup> ]	Moment dewiacji Izy [cm <sup>4</sup> ]
1	10	0	0.02	1-2	6.49	4.44	22.47	4	108	17
2	9.9825	0.0115	0.07	2-3						
3	9.9268	0.0468	0.12	3-4						
4	9.8255	0.106	0.17	4-5						
5	9.6693	0.1822	0.23	5-6						
6	9.4573	0.2624	0.27	6-7						
7	9.1966	0.3387	0.31	7-8						
8	8.8928	0.4088	0.35	8-9						
9	8.55	0.4706	0.38	9-10						
10	8.1729	0.5219	0.41	10-11						
11	7.766	0.5612	0.43	11-12						
12	7.3344	0.5872	0.45	12-13						
13	6.8832	0.5994	0.47	13-14						
14	6.4176	0.5976	0.48	14-15						
15	5.9428	0.582	0.48	15-16						
16	5.4639	0.5534	0.48	16-17						
17	4.986	0.5129	0.47	17-18						
18	4.5139	0.4618	0.47	18-19						
19	4.0519	0.4021	0.45	19-20						
20	3.6044	0.3358	0.44	20-21						
21	3.175	0.2652	0.41	21-22						
22	2.7673	0.1928	0.39	22-23						
23	2.384	0.1213	0.36	23-24						
24	2.0278	0.0535	0.33	24-25						
25	1.7006	-0.0075	0.3	25-26						
26	1.402	-0.0563	0.28	26-27						
27	1.1282	-0.0925	0.25	27-28						
28	0.8787	-0.1202	0.22	28-29						
29	0.6561	-0.1404	0.19	29-30						

30	0.4627	-0.1532	0.16	30-31
31	0.3006	-0.1584	0.13	31-32
32	0.1718	-0.155	0.09	32-33
33	0.0789	-0.1427	0.06	33-34
34	0.0264	-0.112	0.06	34-35
35	0.0044	-0.0561	0.07	35-36
36	0.0005	0.0178	0	36-37
37	0.0005	0.0178	0.09	37-38
38	0.0155	0.1033	0.1	38-39
39	0.0495	0.1969	0.11	39-40
40	0.1028	0.2954	0.12	40-41
41	0.1755	0.3961	0.14	41-42
42	0.2694	0.4966	0.15	42-43
43	0.3855	0.5968	0.17	43-44
44	0.5223	0.6965	0.18	44-45
45	0.6789	0.794	0.2	45-46
46	0.8545	0.8879	0.21	46-47
47	1.0482	0.977	0.23	47-48
48	1.2591	1.0598	0.24	48-49
49	1.4863	1.1355	0.25	49-50
50	1.7286	1.2026	0.26	50-51
51	1.9846	1.2594	0.27	51-52
52	2.2541	1.3037	0.28	52-53
53	2.537	1.3346	0.3	53-54
54	2.8347	1.3505	0.31	54-55
55	3.1488	1.3526	0.33	55-56
56	3.4777	1.3447	0.34	56-57
57	3.8193	1.3271	0.35	57-58
58	4.1721	1.3011	0.36	58-59
59	4.534	1.2683	0.37	59-60
60	4.9025	1.2303	0.37	60-61
61	5.2744	1.1881	0.37	61-62
62	5.6465	1.1425	0.37	62-63
63	6.0158	1.0935	0.37	63-64
64	6.3798	1.0412	0.36	64-65
65	6.736	0.9859	0.35	65-66
66	7.0823	0.9277	0.34	66-67
67	7.4166	0.8671	0.33	67-68
68	7.7369	0.8044	0.31	68-69
69	8.0412	0.7402	0.29	69-70
70	8.3277	0.6749	0.28	70-71
71	8.5947	0.6089	0.25	71-72
72	8.8406	0.5427	0.23	72-73
73	9.0641	0.4768	0.21	73-74
74	9.2639	0.4116	0.19	74-75
75	9.4389	0.3476	0.16	75-76
76	9.5884	0.2853	0.14	76-77
77	9.7111	0.225	0.11	77-78
78	9.8075	0.1646	0.1	78-79
79	9.8825	0.1037	0.08	79-80
80	9.9417	0.0494	0.06	80-81
81	9.9838	0.0126	0.02	81-82
82	10	0	0	82-1

pole przekroju

$$A=6.49 \text{ cm}^2$$

moment statyczny

$$S_z=4.44 \text{ cm}^3$$

moment statyczny

$$S_y=22.47 \text{ cm}^3$$

środek ciężkości

$$y_c = \frac{S_z}{A}$$

$$y_c = \frac{4.44}{6.49}$$

$$y_c=0.68 \text{ cm}$$

środek ciężkości

$$z_c = \frac{S_y}{A}$$

$$z_c = \frac{22.47}{6.49}$$

$$z_c=3.46 \text{ cm}$$

moment bezwładności

$$I_z=3.77 \text{ cm}^4$$

moment bezwładności

$$I_y=108.24 \text{ cm}^4$$

moment odśrodkowy

$$I_{zy}=16.88 \text{ cm}^4$$

moment bezwładności

$$I_{zc} = I_z - y_c^2 \cdot A$$

$$I_{zc} = 3.77 - 0.68^2 \cdot 6.49$$

$$I_{zc}=0.73 \text{ cm}^4$$

moment bezwładności

$$I_{yc} = I_y - z_c^2 \cdot A$$
$$I_{yc} = 108.24 - 3.46^2 \cdot 6.49$$

$$I_{yc} = 30.44 \text{ cm}^4$$

moment odśrodkowy

$$I_{zcy c} = I_{zy} - z_c \cdot y_c \cdot A$$
$$I_{zcy c} = 16.88 - 3.46 \cdot 0.68 \cdot 6.49$$

$$I_{zcy c} = 1.51 \text{ cm}^4$$

kat między osią główną centralną ( $O_{zcgycg}$ ) a osią centralną ( $O_{zcy c}$ )

$$\operatorname{tg} 2a = \frac{2 \cdot I_{zcy c}}{I_{zc} - I_{yc}}$$
$$2a = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2 \cdot 1.51}{0.73 - 30.44}$$
$$a = -2.9^\circ$$

Główne centralne momenty bezwładności wynoszą:

$$J_1 = \frac{J_{zc} + J_{yc}}{2} + \sqrt{\left(\frac{J_{zc} - J_{yc}}{2}\right)^2 + J_{zcy c}^2}$$
$$J_{zcg} = J_1 = \frac{0.7316 + 30.4412}{2} + \sqrt{\left(\frac{0.7316 - 30.4412}{2}\right)^2 + (1.5084)^2} = 30.5176 \text{ cm}^4$$
$$J_2 = \frac{J_{zc} + J_{yc}}{2} - \sqrt{\left(\frac{J_{zc} - J_{yc}}{2}\right)^2 + J_{zcy c}^2}$$
$$J_{ycg} = J_2 = \frac{0.7316 + 30.4412}{2} - \sqrt{\left(\frac{0.7316 - 30.4412}{2}\right)^2 + (1.5084)^2} = 0.6552 \text{ cm}^4$$

Niezmienniki momentów bezwładności przekroju:

$$I_1 = J_1 + J_2 = J_{xc} + J_{yc}$$

$$I_1 = 30.518 \text{ cm}^4 + 0.655 \text{ cm}^4 = 0.732 \text{ cm}^4 + 30.441 \text{ cm}^4$$

$$I_1 = 31.173 \text{ cm}^4 = 31.173 \text{ cm}^4$$

$$I_2 = J_1 \cdot J_2 = J_{xc} \cdot J_{yc} - J_{zcy c}^2$$

$$I_2 = 30.518 \text{ cm}^4 \cdot 0.655 \text{ cm}^4 = 0.732 \text{ cm}^4 \cdot 30.441 \text{ cm}^4 - (1.51 \text{ cm}^4)^2$$

$$I_2 = 19.995 \text{ cm}^8 = 19.995 \text{ cm}^8$$