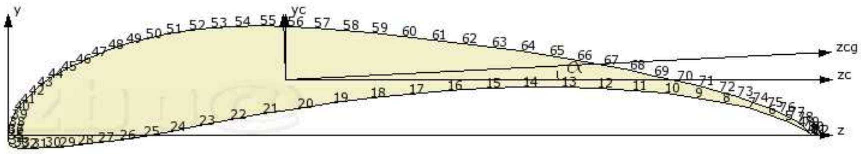
Wyznacz naprężenia jakie powstają w przekroju przedstawionym na rysunku gdy moment M_g działa w 1 płaszczyźnie. M_g= 100 Nm i tworzy z płaszczyzną O_{xy} kąt $\beta=0^o$.

Przekrój profilu i jego obciążenie przedstawiono na rysunku poniżej



W pierwszej kolejności należy wyznaczyć dla tego profilu:

- położenie środka ciężkości z_c , y_c
- momenty bezwładności wzgledem osi z i y
- momenty bezwładności względem osi centralnych i głównych
- kąt między osią centralną i główną

Pole powierzchni, moment statyczny, moment bezwładności i moment dewiacji obliczamy wg podanych poniżej wyrażeń

$$A=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(z_{k+1}-z_k)\cdot(y_{k+1}+y_k)$$

$$I_z=\frac{1}{12}\sum_{k=1}^{n}(z_{k+1}-z_k)\cdot(y_k^3+y_k^2\cdot y_{k+1}+y_k\cdot y_{k+1}^2+y_{k+1}^3)$$

$$I_y=\frac{1}{12}\sum_{k=1}^{n}(y_{k+1}-y_k)\cdot(z_k^3+z_k^2\cdot z_{k+1}+z_k\cdot z_{k+1}^2+z_{k+1}^3)$$

$$I_{zy}=\frac{1}{24}\sum_{k=1}^{n}(z_{k+1}-z_k)\cdot[z_k\cdot(3\,y_k^2+y_{k+1}^2+2\,y_k\cdot y_{k+1})+z_{k+1}\cdot(3\,y_{k+1}^2+y_k^2+2\,y_k\cdot y_{k+1})]$$

Dla pola o punktach 1 - 82, gdy współrzędne podane są w cm

punkt k	x [cm]	y [cm]	długość odcinka /k, k+1/	odcinek	Pole A [cm^2]	Moment bezwładności I_z [cm^4]	Moment bezwładności I_y [cm^4]	Moment dewiacji I_{zy} [cm^4]
1	10	0	0.02	1-2				
2	9.9825	0.0115	0.07	2-3				
3	9.9268	0.0468	0.12	3-4				
4	9.8255	0.106	0.17	4-5				
5	9.6693	0.1822	0.23	5-6				
6	9.4573	0.2624	0.27	6-7				
7	9.1966	0.3387	0.31	7-8				
8	8.8928	0.4088	0.35	8-9				
9	8.55	0.4706	0.38	9-10				
10	8.1729	0.5219	0.41	10-11				
11	7.766	0.5612	0.43	11-12				
12	7.3344	0.5872	0.45	12-13				
13	6.8832	0.5994	0.47	13-14				
14	6.4176	0.5976	0.48	14-15				
15	5.9428	0.582	0.48	15-16				
16	5.4639	0.5534	0.48	16-17				
17	4.986	0.5129	0.47	17-18				
18	4.5139	0.4618	0.47	18-19				
19	4.0519	0.4021	0.45	19-20				
20	3.6044	0.3358	0.44	20-21				
21	3.175	0.2652	0.41	21-22				
22	2.7673	0.1928	0.39	22-23				
23	2.384	0.1213	0.36	23-24				
24	2.0278	0.0535	0.33	24-25				
25	1.7006	-0.0075	0.3	25-26				
26	1.402	-0.0563	0.28	26-27				
27	1.1282	-0.0925	0.25	27-28				
28	0.8787	-0.1202	0.22	28-29				
29	0.6561	-0.1404	0.19	29-30				
30	0.4627	-0.1532	0.16	30-31	6.49	4	108	17
31	0.3006	-0.1584	0.13	31-32				
32	0.1718	-0.155	0.09	32-33				
33	0.0789	-0.1427	0.06	33-34				
34	0.0264	-0.112	0.06	34-35				
35	0.0044	-0.0561	0.07	35-36				
36	0.0005	0.0178	0	36-37				
37	0.0005	0.0178	0.09	37-38				
38	0.0155	0.1033	0.1	38-39				
39	0.0495	0.1969	0.11	39-40				
40	0.1028	0.2954	0.12	40-41				
41	0.1755	0.3961	0.14	41-42				
42	0.2694	0.4966	0.15	42-43				
43	0.3855	0.5968	0.17	43-44				
44	0.5223	0.6965	0.18	44-45				
45	0.6789	0.794	0.2	45-46				
46	0.8545	0.8879	0.21	46-47				
47	1.0482	0.977	0.23	47-48				
48	1.2591	1.0598	0.24	48-49				
49	1.4863	1.1355	0.25	49-50				
50	1.7286	1.2026	0.26	50-51				
51	1.9846	1.2594	0.27	51-52				
52	2.2541	1.3037	0.28	52-53				
53	2.537	1.3346	0.3	53-54				
54	2.8347	1.3505	0.31	54-55				
55	3.1488	1.3526	0.33	55-56				
56	3.4777	1.3447	0.34	56-57				
57	3.8193	1.3271	0.35	57-58				
58	4.1721	1.3011	0.36	58-59				

59	4.534	1.2683	0.37	59-60
60	4.9025	1.2303	0.37	60-61
61	5.2744	1.1881	0.37	61-62
62	5.6465	1.1425	0.37	62-63
63	6.0158	1.0935	0.37	63-64
64	6.3798	1.0412	0.36	64-65
65	6.736	0.9859	0.35	65-66
66	7.0823	0.9277	0.34	66-67
67	7.4166	0.8671	0.33	67-68
68	7.7369	0.8044	0.31	68-69
69	8.0412	0.7402	0.29	69-70
70	8.3277	0.6749	0.28	70-71
71	8.5947	0.6089	0.25	71-72
72	8.8406	0.5427	0.23	72-73
73	9.0641	0.4768	0.21	73-74
74	9.2639	0.4116	0.19	74-75
75	9.4389	0.3476	0.16	75-76
76	9.5884	0.2853	0.14	76-77
77	9.7111	0.225	0.11	77-78
78	9.8075	0.1646	0.1	78-79
79	9.8825	0.1037	0.08	79-80
80	9.9417	0.0494	0.06	80-81
81	9.9838	0.0126	0.02	81-82
82	10	0	0	82-1

pole przekroju — $A=6.49\ cm^2$

środek ciężkości

$$y_C = \frac{S_Z}{A}$$

$$y_C = \frac{4.44}{6.49}$$

$y_C=0.68$ cm

środek ciężkości

$$z_C = \frac{S_Y}{A}$$

$$z_C = \frac{22.47}{6.49}$$

$z_C=3.46$ cm

moment bezwładności — $I_z=3.77\ cm^4$

moment bezwładności — $I_y=108.24\ cm^4$

moment odśrodowy — $I_{zy}=16.88\ cm^4$

moment bezwładności

$$I_{zc}= I_z - y_C^2\cdot A$$

$$I_{zc}= 3.77 - 0.68^2\cdot 6.49$$

$I_{zc}=0.73\ cm^4$

moment bezwładności

$$I_{yc}= I_y - z_C^2\cdot A$$

$$I_{yc}= 108.24 - 3.46^2\cdot 6.49$$

$I_{yc}=30.44\ cm^4$

moment odśrodowy

$$I_{zcyc}= I_{zy} - z_C\cdot y_C\cdot A$$

$$I_{zcyc}= 16.88 - 3.46\cdot 0.68\cdot 6.49$$

$I_{zcyc}=1.51\ cm^4$

kat miedzy osią główna centralną (O_{zcgycg}) a osią centralną (O_{zcyc})

$$tg\ 2\alpha = \frac{2\cdot I_{zcyc}}{I_{zc} - I_{yc}}$$

$$2\alpha = arc\ tg\ \frac{2\cdot 1.51}{0.73 - 30.44}$$

$\alpha=-2.9^o$

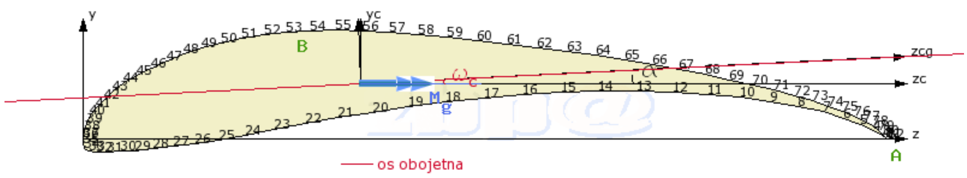
Główne centralne momenty bezwładności wynoszą:

$$J_1 = \frac{J_{zc} + J_{yc}}{2} + \sqrt{\left(\frac{J_{zc} - J_{yc}}{2}\right)^2 + J_{zcyc}^2}$$

$$J_{zcg} = J_1 = \frac{0.7316 + 30.4412}{2} + \sqrt{\left(\frac{0.7316 - 30.4412}{2}\right)^2 + (1.5084)^2} = 30.5176\ cm^4$$

$$J_2 = \frac{J_{zc} + J_{yc}}{2} - \sqrt{\left(\frac{J_{zc} - J_{yc}}{2}\right)^2 + J_{zcyc}^2}$$

$$J_{ycg} = J_2 = \frac{0.7316 + 30.4412}{2} - \sqrt{\left(\frac{0.7316 - 30.4412}{2}\right)^2 + (1.5084)^2} = 0.6552\ cm^4$$



Współrzędne środka ciężkości przekroju w układzie współrzędnych Ozy są następujące:

$z_C=3.46$ i $y_C=0.68$

Współrzędne punktów A, B przekroju w układzie współrzędnych Oz_Cy_C są następujące

$z_{C()}=z_{()}-z_C$
$y_{C()}=y_{()}-y_C$

a w obróconym o kąt $\alpha=2.9^0$ układzie współrzędnych $Oz_{cg}y_{cg}$ poszczególne współrzędne punktów transformują się z układu współrzędnych Oz_Cy_C wg zależności

$z_{cg()}=z_{c()}\cos(\alpha)+y_{c()}\sin(\alpha)$
$y_{cg()}=-z_{c()}\sin(\alpha)+y_{c()}\cos(\alpha)$

Główne centralne momenty bezwładności dla przekroju to:

$I_{zcg}=0.66\ cm^4$
$I_{ycg}=30.52\ cm^4$

występują one pod kątem α = -2.9 w przyjętym układzie współrzędnych.

Ponieważ moment $I_{zcyc}\neq 0$ a obciążenie momentem gnącym występuje w płaszczyźnie O_{xy} kąt $\beta=0^o$ mamy do czynienia z zginaniem ukośnym.

Wykorzystując główne centralne momenty bezwładności przekroju, naprężenia w poszczególnych punktach obliczamy z zależności:

$$\sigma_{()} = M_g \left(\frac{z_{cg()}\cdot\sin(\alpha-\beta)}{I_{ycg}} + \frac{y_{cg()}\cdot\cos(\alpha-\beta)}{I_{zcg}}\right)$$

Dla osi obojętnej naprężenia wynoszą

$$\sigma_{()} = M_g \left(\frac{z_{cg()}\cdot\sin(\alpha-\beta)}{I_{ycg}} + \frac{y_{cg()}\cdot\cos(\alpha-\beta)}{I_{zcg}}\right) = 0$$

po przekształceniu otrzymujesz równanie osi obojętnej

$$y_{cg} = -\,tg(\alpha-\beta)\,\frac{I_{zcg}}{I_{ycg}}\,z_{cg}$$

gdy podstawisz

$$tg(\omega_{cg}) = -\,tg(\alpha-\beta)\,\frac{I_{zcg}}{I_{ycg}}$$

równanie to przyjmuje postać

$$y_{cg} = tg(\omega_{cg})\cdot z_{cg}$$

gdzie ω_{cg} jest kątem jaki tworzy oś obojetna z osią z_{cg} i wynosi on

$$tg(\omega_{cg}) = -\,tg(2.9^o-0^o)\,\frac{0.66}{30.52} = -0.0011$$

$$\omega_{cg} = arctg(-0.0011) = -0.06^o$$

punkty najdalej odległe od osi obojętnej to 1 oznaczony jako A i 54 oznaczony jako B

punkt ()	Współrzędne punktu w układzie współrzędnych					
	Ozy		Oz_cy_c		$Oz_{cg}y_{cg}$	
	z	y	z_c	y_c	z_{cg}	y_{cg}
A	10.00	0.00	6.54	-0.68	6.49	-1.01
B	2.83	1.35	-0.63	0.67	-0.59	0.70

W wybranych punktach naprężenia wynoszą:

$$\sigma_A = 100\cdot10^3\cdot\left(\frac{6.49\cdot\sin(2.9-0)}{30.52} + \frac{-1.01\cdot\cos(2.9-0)}{0.66}\right)\frac{10}{(10)^4}\,\frac{N}{mm^2} = -153.49\ MPa$$
$$\sigma_B = 100\cdot10^3\cdot\left(\frac{-0.59\cdot\sin(2.9-0)}{30.52} + \frac{0.70\cdot\cos(2.9-0)}{0.66}\right)\frac{10}{(10)^4}\,\frac{N}{mm^2} = 106.17\ MPa$$

Gdy do obliczania naprężeń w poszczególnych punktach wykorzytujesz centralne momenty bezwładności to naprężenia wynoszą wówczas

$$\sigma_{()} = \frac{\mathrm{M}_{gz}\cdot y_{c()}}{I_{zc}} - \frac{\mathrm{M}_{gy}\cdot z_{c()}}{I_{yc}}$$

gdzie, we wzorze poszczególne wielkości są następujące

$$\frac{1}{\mathrm{K}} = 1 - \frac{J_{zcyc}^2}{I_{zc}\cdot I_{yc}}$$

$$\mathrm{M}_{gy} = \mathrm{K}\left(M_{gy} + M_{gz}\frac{J_{zcyc}}{I_{zc}}\right)$$

$$\mathrm{M}_{gz} = \mathrm{K}\left(M_{gz} + M_{gy}\frac{J_{zcyc}}{I_{yc}}\right)$$

$M_{gz}= M_g\cdot\cos(\beta)$

$M_{gy}= M_g\cdot\sin(\beta)$

gdy:

$J_{zc}= 0.73\ cm^4$

$J_{yc}= 30.44\ cm^4$

$J_{zcyc}= 1.51\ cm^4$

Wyznaczając te wielkości otrzymujesz:

$$\frac{1}{\mathrm{K}} = 1 - \frac{(1.51)^2}{0.73\cdot30.44}$$

$\mathrm{K} = 1.114$

$M_{gz}= 100\cdot\cos(0) = 100\ Nm$

$M_{gy}= 100\cdot\sin(0) = 0\ Nm$

$$\mathrm{M}_{gy} = 1.114\cdot\left(0 + 100\,\frac{1.51}{0.73}\right)$$

$\mathrm{M}_{gy} = 229.65\ Nm$

$$\mathrm{M}_{gz} = 1.114\cdot\left(100 + 0\,\frac{1.51}{30.44}\right)$$

$\mathrm{M}_{gz} = 111.38\ Nm$

możesz określić naprężenia w interesujących Cię punktach. Naprężenia te wynoszą

$$\sigma_A = \frac{111.38\cdot 10^3\cdot(-0.68)\cdot 10}{0.73\cdot(10)^4} - \frac{229.65\cdot 10^3\cdot 6.54\cdot 10}{30.44\cdot(10)^4} = -153.49\ MPa$$

$$\sigma_B = \frac{111.38\cdot 10^3\cdot 0.67\cdot 10}{0.73\cdot(10)^4} - \frac{229.65\cdot 10^3\cdot(-0.63)\cdot 10}{30.44\cdot(10)^4} = 106.17\ MPa$$

I w tym wypadku dla osi obojętnej naprężenia wynoszą 0.

$$\sigma = \frac{M_{gz}\cdot y_{C()}}{I_{zC}} - \frac{M_{gy}\cdot z_{C()}}{I_{yC}} = 0$$

Równanie osi obojętnej to

$$y_C = \frac{M_{gy}}{M_{gz}}\frac{I_{zC}}{I_{yC}} z_C$$

lub

$$y_C = tg(\omega)\ z_C$$

gdzie

$$tg(\omega_C) = \frac{M_{gy}}{M_{gz}}\frac{I_{zC}}{I_{yC}}$$

po podstwieniu

$$tg(\omega_C) = \frac{229.65}{111.38}\frac{0.73}{30.44} = 0.0496$$

a kąt ω_C jaki tworzy oś obojetna z osią z_C wynosi

$$\omega_C = arctg(0.0496) = 2.84^o$$

Maksymalne naprężenie musi spełniać warunek

$$\sigma = 153.49\ MPa \le k_r = 160\ MPa$$

W przekroju spełniony jest warunek wytrzymałościowy